

Országos Matematikaolimpia
Megyei forduló - 2023. március 10.

VIII. OSZTÁLY

1. feladat. Az a és b nemnulla valós számokra fennáll a következő összefüggés:

$$3(a^6 + b^6) = a^2b^2(a^2b^2 + 9).$$

Bizonyítsd be, hogy az a és b számok közül legalább az egyik irracionális!

2. feladat. A $VABCD$ szabályos négyoldalú gúla alapja $ABCD$. Legyen M , N és P rendre az AD , BC és VA felezőpontja. Bizonyítsd be, hogy a CP egyenes és a (BAD) sík lapszöge akkor és csak akkor 45° -os, ha a CP egyenes és a (VMN) sík lapszöge 30° -os!

Gazeta Matematică

3. feladat. Határozd meg azokat az x és y valós számokat amelyek egyidőben teljesítik az alábbi feltételeket:

- (i) $x \geq 2y^2$
- (ii) $y \geq 2x^2$
- (iii) A $8(x - y)$ szám egész szám.

4. feladat. Ha m egy nenulla természetes szám, jelölje $S(m)$ az m szám természetes szám osztóinak összegét. Ha n és p két nemnulla természetes szám, az n számot elosztjuk a p összes osztójával, ezeket az osztási hányadosokat összeadjuk, és ezt az összeget jelölje $C(n, p)$ (például $C(18, 10) = 18 + 9 + 3 + 1 = 31$).

Legyen a és b két, nemnulla természetes szám.

- a) Bizonyítsd be, hogy ha $S(a) = C(a, b)$ és $S(b) = C(b, a)$, akkor $a = b$.
- b) Igaz-e mindig, hogy ha $S(a) + S(b) = C(a, b) + C(b, a)$, akkor $a = b$?

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatra legfeljebb 7 pont szerezhető.