

Országos Matematikaolimpia  
Megyei forduló - 2024. március 10.

## XII. OSZTÁLY

**1. feladat.** Határozd meg azokat az  $n \geq 2$  természetes számokat, amelyekre az

$$x^2 - \hat{3} \cdot x + \hat{5} = \hat{0}$$

egyenletnek egyetlen megoldása van a  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  gyűrűben!

*Gazeta Matematică*

**2. feladat.** Legyen  $f : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  egy  $[0, 1]$ -en folytonos függvény és  $A = \int_0^1 f(t) dt$ .

a) Igazold, hogy az  $F : [0, 1] \rightarrow [0, A]$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , bármely  $x \in [0, 1]$  függvény invertálható és inverze deriválható!

b) Igazold, hogy egyetlen olyan  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  függvény létezik, amelyre fennáll az

$$\int_0^x f(t) dt = \int_{g(x)}^1 f(t) dt \quad (1)$$

egyenlőség minden  $x \in [0, 1]$  esetén!

c) Igazold, hogy létezik olyan  $c \in [0, 1]$  szám, amelyre  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - c}{x - c} = -1$ , ahol  $g$  az (1) egyenlőséget teljesítő egyetlen  $g$  függvény!

**3. feladat.** Legyen  $k \in \mathbb{N}^*$ . Azt mondjuk, hogy az  $(A, +, \cdot)$  gyűrű  $CP(k)$  tulajdonságú, ha bármely  $a, b \in A$  esetén létezik  $c \in A$  úgy, hogy  $a^k = b^k + c^k$ .

a) Adj példát olyan véges  $(A, +, \cdot)$  gyűrűre, amely nem rendelkezik a  $CP(k)$  tulajdonsággal egyetlen  $k \geq 2$  természetes számra sem!

b) Legyen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , és  $M(n) = \{m \in \mathbb{N}^* \mid (\mathbb{Z}_m, +, \cdot) CP(m) \text{ tulajdonságú}\}$ . Bizonyítsd be, hogy  $M(n)$  a szorzással olyan monoidot képez, amely részhalmaza a páratlan természetes számok  $2 \cdot \mathbb{N} + 1$  halmazának!

**4. feladat.** Legyen  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  egy folytonosan deriválható függvény, amelyre  $f(0) = 0$ , és  $0 \leq f'(x) \leq 1$  bármely  $x > 0$  esetén. Bizonyítsd be, hogy

$$\int_0^a f(t)^{2n+1} dt \leq (n+1) \cdot \left( \int_0^a f(t)^n dt \right)^2$$

bármely  $a > 0$  és bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén!

*Munkaidő 3 óra.*

*Minden feladatra legfeljebb 7 pont szerezhető.*